Komplexe Zahlen

Geradengleichungen

Datei Nr. 50035

Stand 3. November 2023

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM

https://mathe-cd.de

Inhalt von 50035

1 Geraden in der Gaußschen Zahlenebene

Es gibt drei Formen von Geradengleichungen:

1.	Die lineare Gleichung:	$ax + by + c = 0$,	mit $a,b,c \in \mathbb{R}$
2.	Die komplexe Gleichung:	$\bar{a} \cdot z + a \cdot \bar{z} + b = 0$	mit $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{R}$
3.	Die Parametergleichung:	$z = a + \lambda \cdot b$	mit $a,b \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Hier Details dazu:

1.1 Koordinatengleichung eine Gerade in der z-Ebene

Mit $z = x + i \cdot y$ kann man in der x-y-Ebene Geraden so darstellen, wie es in der reellen Zahlenebene auch geschieht: $y = m \cdot x + n$ mit $m, n \in \mathbb{R}$ oder $x = d$, $d \in \mathbb{R}$.
(wenn die Gerade parallel zur imaginären y-Achse ist),

Im der Form $ax + by + c = 0$ sind beide Versionen enthalten, $a,b,c \in \mathbb{R}$.

1.2 Die Gleichung $\bar{a} \cdot z + a \cdot \bar{z} + b = 0$ (1) stellt eine Gerade in der z-Ebene dar.

Dabei ist a eine komplexe Zahl und b eine reelle Zahl.

1.2.1 Wie kommt man auf diese Gleichung?

Es sei $z = x + i \cdot y$,

dann ist $\bar{z} = x - iy$ die dazu konjugierte Zahl.

Dann folgt: $z + \bar{z} = 2x \Rightarrow$ $\boxed{x = \frac{z + \bar{z}}{2}}$

und $z - \bar{z} = 2iy \Rightarrow$ $\boxed{y = \frac{z - \bar{z}}{2i}}$

Beides setzt man in die allgemeine Geradengleichung $g\colon\ y = mx + n$ ein:

$$\frac{z - \bar{z}}{2i} = m \cdot \frac{z + \bar{z}}{2} + n \qquad | \cdot 2i$$

$$z - \bar{z} = mi \cdot (z + \bar{z}) + 2ni$$

$$z - \bar{z} = mi \cdot z + mi \cdot \bar{z} + 2ni$$

$$z(1 - mi) - \bar{z}(1 + mi) - 2ni = 0 \quad | \cdot i$$

$$z \cdot (i + m) - \bar{z}(i - m) + 2n = 0$$

$$z \cdot \underbrace{(m + i)}_{\bar{a}} + \bar{z}\underbrace{(m - i)}_{a} + 2n = 0$$

Ergebnis: $\bar{a} \cdot z + a \cdot \bar{z} + b = 0$

1.2.2 4 Zahlenbeispiele: Koordinatengleichung in komplexe Gleichung.

1. Methode:

(a) Wandle $y = 2x - 1$ in eine komplexe Geradengleichung um.

Lösung: Es sei $z = x + i \cdot y$,

dann ist $\bar{z} = x - iy$

Dann folgt: $z + \bar{z} = 2x \Rightarrow$ $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$

und $z - \bar{z} = 2iy \Rightarrow$ $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

Einsetzen in $y = 2x - 1$: $\frac{z-\bar{z}}{2i} = 2 \cdot \frac{z+\bar{z}}{2} - 1 \quad | \cdot 2i$

$$z - \bar{z} = 2i \cdot (z + \bar{z}) - 2i$$

$$z - \bar{z} = 2iz + 2i\bar{z} - 2i$$

$$z - 2iz - \bar{z} - 2i\bar{z} + 2i = 0$$

$$z(1-2i) - \bar{z}(1+2i) + 2i = 0 \quad | \cdot i \qquad \text{(a1)}$$

$$z(i+2) - \bar{z}(i-2) - 2 = 0$$

Umstellen: $(2+i)z + (2-i)\bar{z} - 2 = 0$ (a2)

Hinweis: (a1) und (a2) sind gleichwertige komplexe Geradengleichungen.
(a2) entspricht der allgemeinen Form $\bar{a}z + a\bar{z} + b = 0$

(b) $y = -\frac{2}{3}x + 1$ Man benötigt wie oben $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ und $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

Einsetzen in $y = -\frac{2}{3}x + 1$ $\frac{z-\bar{z}}{2i} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{z+\bar{z}}{2} + 1 \quad | \cdot 2i$

$$z - \bar{z} = -\frac{2i}{3}z - \frac{2i}{3}\bar{z} + 2i$$

$$z\left(1 + \tfrac{2}{3}i\right) + \bar{z}\left(-1 + \tfrac{2}{3}i\right) - 2i = 0 \quad | \cdot i \qquad \text{(b1)}$$

$$z\left(i - \tfrac{2}{3}\right) + \bar{z}\left(-i - \tfrac{2}{3}\right) + 2 = 0$$

Umordnen: $\left(-\frac{2}{3} + i\right)z + \left(-\frac{2}{3} - i\right)\bar{z} + 2 = 0$ (b2)

oder: $| \cdot (-3)$ $(2-3i) \cdot z + (2+3i) \cdot \bar{z} - 6 = 0$ (b3)

Wir haben jetzt drei äquivalente Gleichungen!

Lösung mit der 2. Methode auf Seite 7

(c) $y = -2x$

Man benötigt wie oben $x = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ und $y = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

und erhält: $\dfrac{z-\overline{z}}{2i} = -2 \cdot \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ $\quad | \cdot 2i$

$$z - \overline{z} = -2i(z+\overline{z})$$

$$z(1+2i) - \overline{z}(1-2i) = 0 \quad | \cdot i$$

$$z(i-2) - \overline{z}(i+2) = 0$$

$$(-2+i)z + (-2-i)\cdot\overline{z} = 0$$

oder: $(2-i)z + (2+i)\cdot\overline{z} = 0$

(d) $y = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z = i$

Mit $x = \dfrac{z+\overline{z}}{2}$ und $y = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}$

entsteht $\dfrac{z-\overline{z}}{2i} = 1$ $\quad | \cdot 2i$

$$z - \overline{z} - 2i = 0 \quad | \cdot i$$

$$i \cdot z - i \cdot \overline{z} + 2 = 0$$

Hierzu eine Probe: $z = 0 + 1 \cdot i$ liegt auf g:

Einsetzen: $i \cdot \boxed{i} - i \cdot \boxed{-i} + 2 = 2\,i^2 + 2 = -2 + 2 = 0$

Man sieht, dass diese komplexen Geradengleichungen auch in ähnliche Gleichungen umgeformt werden können. Für manche Berechnungen (z. B. Abbilden durch komplexe Funktionen) sind sie hilfreich, und dabei ist es auch egal, welche der zwei oder drei komplexen Formen verwendet werden.

2. Methode: Theorie

Wichtig: Man kann die komplexe Gleichung $\bar{a}\cdot z + a\cdot\bar{z} + b = 0$ (1) durch Ersetzen von

$a = u + i\cdot v$ und $z = x + i\cdot y$ umwandeln in

$$a\cdot\bar{z} = (u + i\cdot v)\cdot(x - iy) = (ux + vy) + (vx - uy)\cdot i \qquad (2)$$

und $$\bar{a}\cdot z = (u - i\cdot v)\cdot(x + iy) = (ux + vy) - (vx - uy)i \qquad (3)$$

(2) + (3) ergibt $a\cdot\bar{z} + \bar{a}\cdot z = 2(ux + vy)$.

Vergleichen mit $\bar{a}\cdot z + a\cdot\bar{z} = -b$ (1)

ergibt: $2(ux + vy) = -b$ | :2

Merke: $\boxed{ux + vy + \frac{b}{2} = 0}$ (3)

Diese Gleichung ist – ***wenn man weiß*** – nützlich zur Umrechnung einer linearen Geradengleichung in eine komplexe Geradengleichung. **Hier die Methode dazu**:

Gegeben ist die lineare Geradengleichung g: $y = mx + n$

Man stellt sie um in: $\boxed{mx - y + n = 0}$

und vergleicht mit (3): $\boxed{ux + vy + \frac{1}{2}b = 0}$

Dann erhält man $u = m$, $v = -1$ und $b = 2n$

Damit kennt man $a = u + iv \Rightarrow \boxed{a = m - i \text{ und } \bar{a} = m + i}$

Aus $\bar{a}\cdot z + a\cdot\bar{z} + b = 0$ folgt dann: $(m + i)z + (m - i)\bar{z} + 2n = 0$

Aus der Steigung m der Geraden erhält man also: $\boxed{a = m - i}$ und $\boxed{\bar{a} = m + i}$ und $\boxed{b = 2n}$

MERKE: $y = mx + n \Rightarrow \boxed{(m + i)z + (m - i)\bar{z} + 2n = 0}$

Hier die vier Umrechnungsbeispiele zur 2. Methode

die auf den Seiten 4 und 5 mit der 1. Methode bearbeitet worden sind:

a) Wandle $y = 2x - 1$ in eine komplexe Geradengleichung um.

Ansatz: $\boxed{\underbrace{(m+i)}_{\bar{a}}z + \underbrace{(m-i)}_{a}\bar{z} + 2n = 0}$

$m = 2 \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} a = m - i = 2 - i \\ \bar{a} = m + i = 2 + i \end{Bmatrix}$ und b = 2n =-2

Einsetzen in $\bar{a}\cdot z + a\cdot\bar{z} + b = 0 \quad \Rightarrow \quad \underbrace{(2+i)}_{\bar{a}}\cdot z + \underbrace{(2-i)}_{a}\cdot\bar{z}\ \underbrace{-2}_{b} = 0$

(b) $y = -\frac{2}{3}x + 1$

$m = -\frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} a = -\frac{2}{3} - i \\ \bar{a} = -\frac{2}{3} + i \end{Bmatrix}$ und b = 2n =2

Einsetzen in $\bar{a}\cdot z + a\cdot\bar{z} + b = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(-\frac{2}{3}+i\right)z + \left(-\frac{2}{3}-i\right)\bar{z} + 2 = 0$

Oder $\cdot(-3)$: $(2-3i)\cdot z + (2+3i)\cdot\bar{z} - 6 = 0$

(c) $y = -2x$

$m = -2 \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} a = -2 - i \\ \bar{a} = -2 + i \end{Bmatrix}$ und b = 2n = 0

Einsetzen in $\bar{a}\cdot z + a\cdot\bar{z} + b = 0 \quad \Rightarrow \quad (-2+i)\cdot z + (-2-i)\cdot\bar{z} = 0$

bzw. $(2-i)\cdot z + (2+i)\cdot\bar{z} = 0$

(d) $y = 1$

$m = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} a = -i \\ \bar{a} = +i \end{Bmatrix}$ und b = 2n = 2

Einsetzen in $\bar{a}\cdot z + a\cdot\bar{z} + b = 0 \quad \Rightarrow \quad i\cdot z - i\cdot\bar{z} + 2 = 0$

(e) $y = 2$

$m = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{Bmatrix} a = -i \\ \bar{a} = +i \end{Bmatrix}$ und b = 2n = 2

Einsetzen in $\bar{a}\cdot z + a\cdot\bar{z} + b = 0 \quad \Rightarrow \quad i\cdot z - i\cdot\bar{z} + 4 = 0$

Probe: $i(x+iy) - i(x-iy) + 4 = 0$

$ix - y - ix - y + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2y + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{y = 2}$

1.2.3 Umrechnung der komplexen Geradengleichung in die Koordinatenform

Beispiele

(a) Gegeben sei die Gleichung $(2+i)z+(2-i)\bar{z}-3=0$

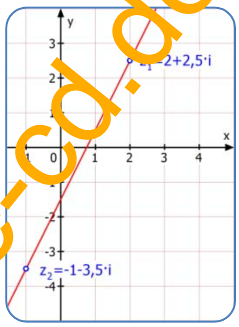
Zuerst muss man erkennen, dass sie die Form $\boxed{\bar{a}\cdot z+a\cdot\bar{z}+b=0}$ *hat, denn es gibt ähnlich aussehende Gleichungen, die keine Gerade darstellen, siehe weiter unten.*

Setze $z=x+i\cdot y$ ein: $(2+i)(x+iy)+(2-i)(x-iy)-3=0$

$$\left(2x+i^2\cdot y\right)+\cancel{(x+2y)}i+\left(2x+i\cdot y^2\right)+\cancel{(-x-2y)}i-3=0$$

$$2(2x-y)-3=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2x-y=1{,}5 \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{y=2x-1{,}5}$$

Und wir sehen die Koordinatengleichung einer Geraden.

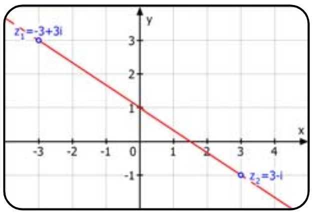


(b) Bestimme zu $(2-3i)z+(2+3i)\bar{z}-6=0$ eine linearen Gleichung.

Setze $z=x+i\cdot y$ ein: $(2-3i)(x+i\cdot y)+(2+3i)(x-i\cdot y)-6=0$

$$(2x+3y)+\cancel{(-3x+2y)}i+(2x+3y)+\cancel{(3x-2y)}i-6=0$$

$$2(2x+3y)-6=0 \quad\Leftrightarrow\quad 2x+3y=3 \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{y=-\tfrac{2}{3}x+1}$$

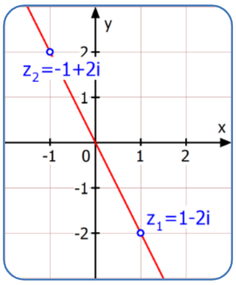


(c) Bestimme zu $(-2+i)z+(-2-i)\bar{z}=0$ eine linearen Gleichung.

Setze $z=x+i\cdot y$ ein: $(-2+i)(x+i\cdot y)+(-2-i)(x-i\cdot y)=0$

$$(-2x-y)+\cancel{(1-2y)}i+(-2x-y)+\cancel{(-1+2y)}i=0$$

$$2(-2x-y)=0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{y=-2x} \quad \text{Ursprungsgerade.}$$

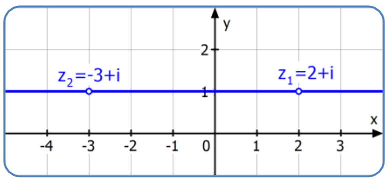


(d) Bestimme zu $3iz-3i\bar{z}+6=0$ eine Koordinatengleichung:

Setze $z=x+i\cdot y$ ein: $3i\cdot(x+yi)-3i\cdot(x-yi)+6=0$

$$3xi-3y-3xi-3y+6=0$$

$$-6y+6=0 \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{y=1}$$

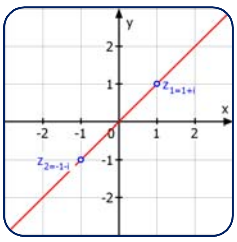


(e) Bestimme zu $(1+i)z+(1-i)\bar{z}=0$ eine Koordinatengleichung:

Setze $z=x+i\cdot y$ ein: $(1+i)(x+i\cdot y)+(1-i)\cdot(x-i\cdot y)=0$

$(x-y+ix+iy)+(x-y-ix-iy)=0$ kann

$$2x-2y=0 \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{y=x}$$



Warnung:

Es gibt *ähnlich* aussehende Gleichungen, die aber keine Gerade darstellen:

a) $2z - 2\bar{z} - 8 = 0$ stellt keine Gerade dar, denn mit $a = 2 \Rightarrow \bar{a} = 2$ und nicht -2.

Stattdessen gilt: $2(x+iy) - 2(x-iy) - 8 = 0 \Leftrightarrow 4yi = 8 \Leftrightarrow y = \frac{2}{i} = \frac{2 \cdot i}{i \cdot i} = \frac{2i}{-1} = -2i$

Dies ist keine lineare Geradengleichung, denn in einer x-y-Gleichung steht kein i.

b) Analog: $z + \bar{z} = 2$: Keine Gerade.

c) Aber $(2-i)z + (-2+i)\bar{z} = 0 \Leftrightarrow (2-i)(x+iy) + (-2+i)(x-iy) = 0$

d. h. $(2x+y) + (-x+2y)i + (-2x+y) + (x+2y)i = 0$

$$2y + 4yi = 0 \Leftrightarrow (2+4i)y = 0 \Leftrightarrow y = 0$$

Das ist die x-Achse, also die reelle Zahlenachse.

d) $(3+2i)z - (3-2i)\bar{z} + 5 = 0$

Diese Gleichung hat die Form $\bar{a}z - a\bar{z} + b = 0$.

Wir konnten auf Seite 4 in (a) und (b) sehen, dass auch solche Gleichungen eine Gerade darstellen.

Versuch einer Umrechnung:

$$(3+2i)(x+iy) - (3-2i)(x-iy) + 5 = 0$$

$$(3x + 3iy + 2ix - 2y) - (3x - 3iy - 2ix - 2y) + 5 = 0$$

$$6iy + 4ix + 5 = 0$$

$$6iy = -4ix - 5$$

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{6}i$$

Das ist keine Geradengleichung.

e) Und wie ist es mit $(3+2i)z + (3-2i)\bar{z} + 5 = 0$?

$$(3+2i)(x+iy) + (x-iy) + 5 = 0$$

$$(3x + 3iy + 2ix - 2y) + (3x - 3iy - 2ix - 2y) + 5 = 0$$

$$6x - 4y + 5 = 0$$

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$$

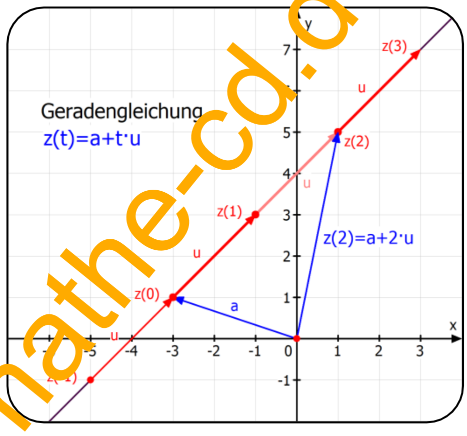
Das stellt eine Gerade dar.

1.3 Die Parametergleichung einer Geraden in der z-Ebene

Bei einer Parameterdarstellung hängt die komplexe Zahl von einem Parameter t ab: Daher schreibt man z(t) oder $z(\lambda)$.

Um die Lage einer Geraden anzugeben, muss man einen Punkt („**Aufpunkt**“) von ihr kennen (also eine komplexe „**Anfangszahl**“ a), und einen **Richtungsvektor** u, der angibt, in welcher Richtung man bei Veränderung von t weitergeht.

Beispiel 1: $z(t) = \underbrace{(-3+i)}_{a} + t\cdot\underbrace{(2+2i)}_{u}$



Für t = 0 erhält man den Anfangspunkt $z(0) = -3+i = a$

Für t = 1 erhält man $z(1) = (-3+i) + 1\cdot(2+2i) = (-1+3i)$

Für t = 2 erhält man $z(2) = (-3+i) + 2\cdot(2+2i) = (1+5i)$

An diesem Punkt sieht man auch, dass man sowohl den Punkt mit $z(2)$ beschreibt, also auch seinen „Ortsvektor“, also den Pfeil, der vom Ursprung zum Punkt zeigt. Korrekterweise müsste man den Ortsvektor mit einem Pfeil kennzeichnen: $\overrightarrow{z(t)}$.

Dies ist eine genaue ***Analogie zur Vektorrechnung***, nur mit geänderter Schreibweise.

Vektoriell sieht diese Gerade so aus: $\vec{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ und für t = 2 erhält man einen

Ortsvektor $\vec{\mathbf{x}}_2 = \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$, der zum Punkt $Z_2(1|5)$ zeigt.

USW.